Graflarda Derece Bağlantılık İndeksi
ve Temel İşlemlerde İncelenmesi
(The Degree Connection Index of Graphs and research on basic operations)

*[1]Mehmet Umit GURSOY ve [1]Pinar DUNDAR
[1]*Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Bornova, İzmir, Türkiye*

Abstract

Some damages may occur on a networks vertices or edges are prevented full functionality of the network.
Therefore, while designing networks, we need to pay attention in order to ensure continuity of data flow and to resistance of the network against disruptions. A model with more resist to disruptions is preferred than others. In the event of this problem, initially theoretical approaches can do to minimize any damage effect. This approach, which plays an important role, is called *Vulnerability* in graph theory. Since 1980, researchers who worked on graph theory have been used many measurements to calculate vulnerability. For the aim of the communication or accessibility function between vertices by edges; connectivity, edge connectivity, total connectivity, integrity, edge integrity, toughness, tenacity etc new definitions were defined. These definitions are examined on all graph vertices at communication structure. Resulting of using these definitions, vertices or edges are less resistance can remove of the network system or add a new links between vertices on the network to generate more strong models can form.

In this paper, we present a new measurement, is called *Degree Connection Index*, for vulnerability. Degree connection index is associated vertex degrees with internally disjoint paths between vertex pairs can give us to evaluate reliability and stability of graphs. We also give some results of degree connection index on graph operations. This index give us a total sum for every pair of graph vertices, so this case can let us more reliable comments to resist disruptions of graphs vulnerability.

Keywords: Vulnerability, Connectivity, Total Connectivity, Degree Connection Index.

Özet

Bir iletişim ağının bazı tepe veya tepelerinde oluşabilecek hasarlar bu ağın işlevini tam olarak gerçekleştirmesini engeller. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken, veri akışının devamlılığını sağlamak için ağın bozulmalara karşı göstereceği direnci önemsemek gerekir. Direnci fazla olan bir model diğerlerine göre daha çok tercih edilir. Dolayısıyla bir sorunla karşılaşılması halinde ağda oluşabilecek hasar baştan en aza indirgenmiş olur. Bunun için önceden teorik yaklaşımlar yapılabilir. Bu yaklaşımlar zedelenebilirlik (vulnerability) adıyla graf teoride önemli bir yer tutmaktadır. 1980'lerden beri graf teori ile çalışanlar pek çok ölçüm kullanmışlardır. Tepeler ve ayrıtlar arasındaki iletişim ve erişilebilirlik açısından bir problemin amaç fonksiyonuna uygun olarak; bağlantılık (connectivity), ayrıt bağlantılık (edge-connectivity), toplam bağlantılık (total connectivity), bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük (edge-integrity), sağlamlık (toughness), kararlılık (tenacity) ve benzeri yeni kavramlar tanımlanmıştır. Bu ölçümler grafın tüm yapısındaki iletişimi inceler. Bu tanımlar kullanılarak, sistemde direnci düşük olan tepeler ve ayrıtlar ağdan çıkarılarak veya yeni bağlantılar oluşturularak daha sağlam modeller oluşturulmaktadır.

Bu çalışmada grafın tepeleri arasındaki içten ayrık yolların sayısının tepe dereceleriyle beraber ilişkilendirilmesiyle grafın güvenilirliğini ve sağlamlığını değerlendirebilecek tarafımızdan tanımlanan *Derece Bağlantılık İndeksi* çalışılmış, graf işlemleri ile ilgili sonuçları verilmiştir. Derece bağlantılık indeksi hesaplanırken grafın tüm tepe ikilileri arasındaki içten ayrık yolların sayısının tepe dereceleriyle birlikte kullanılarak hesaba katılmasıyla toplam bir değer sunan bu indeks grafın bozulmalara karşı direnci hakkındaki yorumlamaları daha da güvenilir yapmaktadır.

*Corresponding author: M. Umit GURSOY Address: Faculty of Science, Department of Mathematics, Ege University, Bornova-Izmir TURKEY. E-mail address: umitgursoy@yahoo.com Phone: +90 505 933 00 96

Anahtar Sözcükler: Zedelenebilirlik, Bağlantılık, Toplam Bağlantılık, Derece Bağlantılık İndeksi.

1. Giriş

Bir *G Grafı*, tepeler olarak adlandırılan boş olmayan bir $V(G)$ sonlu nesneler kümesi ile G nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir $E(G)$ (boş olabilir) ayrıtlar kümesinden oluşur ve $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir. G grafının tepeler kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nin eleman sayısına G nin *sıralanışı* (order) denir ve $|V(G)| = n$ veya $n(G)$ olarak gösterilir. Diğer taraftan ayrıtlar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ nin eleman sayısına *boyut* (size) denir ve $|E(G)| = m$ veya $n(G)$ olarak gösterilir. Grafta en az bir ayrıt yönlü ise, bu grafa *yönlü* (directed) aksi halde *yönsüz* veya *yönlendirilmemiş* (undirected) graf denir. G grafının herhangi iki tepesi arasında birden fazla ayrıt varsa bu ayrıtlara çok katlı ayrıt, bu tür graflara ise *çok katlı* (multiple) graf denir. Çok katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara *basit* (simple) graf denir. Bu çalışmada yönsüz basit graflar kullanılmıştır. G grafının herhangi bir $v \in V$ tepesinin *derecesi* (degree) o tepenin bitişik olduğu ayrıtların sayısıdır ve $deg(v)$ ile gösterilir [1,2,5].

Yardımcı Teorem 1.1: n tepeli m ayrıtlı bağlantılı bir G grafında tepe derecelerinin toplamı ayrıt sayısının iki katıdır [1].

Bir G grafının v tepeleri için, $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ biçiminde oluşan tepe ve ayrıt dizilişine *yürüyüş* (walk) denir.
Tüm tepeleri birbirinden farklı sonuç olarak ayrıtlarıda birbirinden farklı olan bir yürüyüşe *yol* (path) denir. G grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa G grafına *bağlantılı* (connected) graf denir. G grafının u ve v tepelerini birleştiren iki yol uç tepeleri dışında ortak bir tepeye sahip değilse bu yollara *içten ayrık yol* (internally disjoint path) veya *içten tepe ayrık yol* (internally vertex disjoint path) denir. Tüm tepeleri birbirinden farklı ve tepe sayısı $n \geq 3$ olan kapalı bir yürüyüşe *çevre* (cycle) denir. Birleştirilmiş ve çevre içermeyen (acyclic) grafa *ağaç* (tree) denir. Tüm tepelerini içeren yalnız bir yola sahip grafa *yol graf* (path graph) denir ve P_n ile gösterilir [1,5].

Yardımcı Teorem 1.2: n tepeli P yol grafı ve T ağacının toplam ayrıt sayısı $n – 1$ dir [1,2].

Bir G grafında bitişik olmayan u ve v tepesini bir ayrıt ile birleştirmeye *ayrıt ekleme* (addition of the edge) denir ve $G+uv$ biçiminde gösterilir. Bir G grafının tüm tepelerinin bir v tepesine bir ayrıtla birleştirilmesi işlemine *tepe ekleme* (addition of a vertex) denir ve $G+v$ biçiminde gösterilir. Bir G grafından bitişik olan u ve v tepelerini birleştiren $e = \{u, v\}$ ayrıtını silmeye *ayrıt çıkarma* (removal of an edge) denir ve $G – e$ biçiminde gösterilir. G grafından bir v tepesi ve v ye bitişik olan tüm ayrıtları silmeye *tepe çıkarma* (removal of a vertex) denir ve $G – v$ biçiminde gösterilir.

Bağlantılı bir G grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe bırakmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın *bağlantılık* (connectivity) veya *tepe bağlantılık* (vertex connectivity) sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir [6]. Birleştirilmiş bir G grafında, bitişik olmayan u ve v tepelerini bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına *u ve v* nin *yerel bağlantılığı* (local connectivity) denir $\kappa(u,v)$ ile gösterilir. n

tepeli bir G grafında tüm tepe çiftlerinin bağlantılığının toplamı G nin *toplam bağlantılığı* (total connectivity) olarak tanımlanır ve $K(G)$ ile gösterilir [2].

$$K(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \kappa(u,v)$$

Graf teoride, herhangi bir iletişim ağında tepeler arasındaki iletişimi güçlendirmek, grafın sağlamlığını ölçmek ve artırmak amacıyla çeşitli ölçümlerden yararlanılmaktadır. Bu ölçümler, iletişimin işlevine ve amaca yönelik farklılıklar taşımaktadır. Grafın tepeleri arasındaki içten ayrık yolların sayısının tepe dereceleriyle beraber ilişkilendirilmesiyle, grafın güvenilirliğini ve sağlamlığını değerlendirebilecek tarafımızdan tanımlanan *derece bağlantılık indeksi* [4] doktora tezinde çalışılmıştır.

Tanım 1.1: Bir G grafının $u, v \in V(G)$ tepeleri için $deg(u)$ ve $deg(v)$ tepe dereceleri, $\kappa(u,v)$ de u ve v tepeleri arasındaki içten ayrık yolların sayısı olmak üzere, grafın *Derece Bağlantılık İndeksi* (*Degree Connection Index*)

$$\kappa_d(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V} [\deg(u) + \deg(v)]\, \kappa(u,v)$$

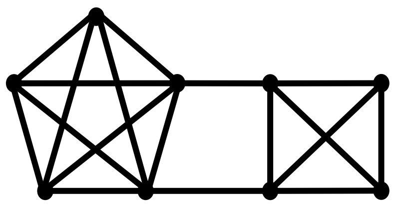
olarak tanımlanır [4].

Burada u,v tepe çifti için,

$$\kappa_d(u,v) = [\deg(u) + \deg(v)]\, \kappa(u,v)$$

ifadesine iki tepenin *yerel derece bağlantılık değeri* (*local degree connection value*) denir [4].

Derece bağlantılık indeksi hesaplanırken grafın tüm tepe ikilileri için bu tepeler arasındaki içten ayrık yolların sayısının kullanılması ve bu değerin tepe dereceleriyle birlikte hesaba katılarak toplam bir değer olarak sunmasıyla; yeni tanımlanmış bu indeks grafın bozulmalara karşı direnci hakkındaki yorumlamaları daha da güvenilir yapmaktadır. Bu yorumlamayı aşağıdaki örnekte kolayca görebiliriz.

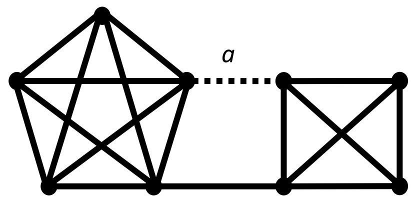


G

$\kappa(G) = 2$ $\quad K(G) = 100$

$\kappa_d(G) = 812$

Şekil 1.1 G Grafı

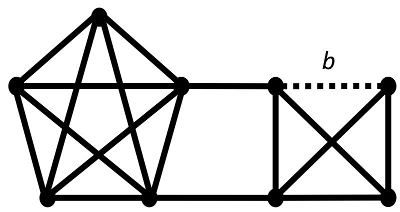


$G-a$

$\kappa(G) = 1$ $\quad K(G) = 78$

$\kappa_d(G-a) = 602$

Şekil 1.2 $G-a$ Grafı

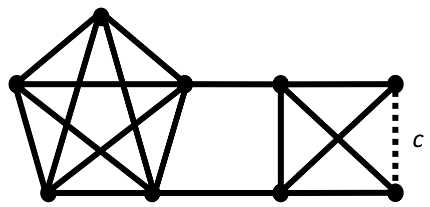


$G-b$

$\kappa(G) = 2$ $K(G) = 95$

$\kappa_d(G-b) = 744$

Şekil 1.3 $G-b$ Grafı

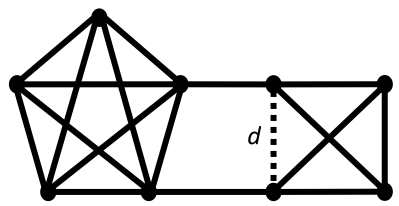


$G-c$

$\kappa(G) = 2$ $K(G) = 95$

$\kappa_d(G-c) = 746$

Şekil 1.4 $G-c$ Grafı

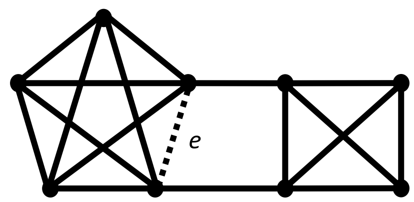


$G-d$

$\kappa(G-d) = 2$ $K(G-d) = 99$

$\kappa_d(G-d) = 766$

Şekil 1.5 $G-d$ Grafı



$G-e$

$\kappa(G-e) = 2$ $K(G-e) = 99$

$\kappa_d(G-e) = 754$

Şekil 1.6 $G-e$ Grafı

Şekil 1.1 deki G grafından Şekil 1.2 de a ayrıtı Şekil 1.3 de b ayrıtı Şekil 1.4 de ise c ayrıtı Şekil 1.5 de d ayrıtı Şekil 1.6 de e ayrıtı çıkarılarak farklı graflar oluşturulmuş ve bu graflara ait bağlantılık, toplam bağlantılık ve derece bağlantılık indeksi değerleri verilmiştir. Burada G, $G-a$, $G-b$, $G-$ c, $G-d$ ve $G-e$ graflarının sağlamlık sıralaması yapılmak istenildiğinde bağlantılık açısından en zayıf graf $G-a$ grafıdır. Diğer graflar ise aynı bağlantılık verisine sahiptir dolayısıyla aralarında bir sıralama yapılamamaktadır. Karşılaştırma toplam bağlantılık değerleri ile yapıldığında en sağlam grafın G grafı, en zayıf grafın ise $G-a$ olduğu görülür. Ancak $G-b$ ve $G-c$ ile $G-d$ ve $G-e$ graflarının toplam bağlantılık değerleri aynıdır. Dolayısıyla $G-b$ ve $G-c$ ile $G-d$ ve $G-e$ grafları toplam bağlantılık parametresiyle değerlendirilemez. Bu durumda farklı bir değerlendirme ölçütü verisine ihtiyaç vardır. Derece bağlantılık indeksi ise bu graf ikililerinin arasında seçim yapılabilmesine olanak sağlar. $G-c$ grafının $G-b$ grafından, $G-d$ grafının $G-e$ grafından daha sağlam bir yapıda olduğunu gösterir. Dolayısıyla bütün grafları zedelenebilirlik açısından sıralamak mümkündür. Sonuç olarak derece bağlantılık indeksi zedelenebilirlik ile ilgili daha hassas bir değer üreterek bize yardımcı olur [4].

2. Derece Bağlantılık İndeksinin Temel Graf İşlemleri Altındaki Sonuçları

Temel graf işlemleri altında derece bağlantılık indeksiyle ilgili sonuçları bu bölümde vereceğiz. Öncelikle ayrıt çıkarma işlemiyle derece bağlantılık indeksinin nasıl etkilendiğini inceleyelim.

Teorem 2.1: Herhangi bir *G* grafından bir e ayrıtının çıkarılması grafın derece bağlantılık indeksini azaltır [4].

$$\kappa_d(G-e) < \kappa_d(G)$$

İspat: İspat üç durumda incelenecektir. Burada *G* nin herhangi iki u ve v tepesi ve bu tepeleri birleştiren ayrıt e olsun. $a, b, t \in Z^+$ olmak üzere *G* grafı için $deg(u)=a$, $deg(v)=b$ ve $\kappa(u,v)=t$ olsun.

1. Durum: Graftan çıkarılan e ayrıtı grafının birleştirilmişliğini bozmayan bir ayrıt olsun. Bu durumda *G* nin birleştirilmişliğinin bozulmaması için $a, b, t \geq 2$ olmalıdır. Çünkü $G-e$ grafı için $deg(u)=a-1$, $deg(v)=b-1$ ve $\kappa(u,v)=t-1$ olur. Dolayısıyla *G* grafındaki u-v tepe ikilisi için yerel derece bağlantılık

$$\kappa_d(u,v) = [\deg(u)+\deg(v)]\,\kappa(u,v) = (a+b)t$$

olan değer $G-e$ grafında u-v tepe çifti için $\kappa_d(G-e)$ hesaplanırken yerel derece bağlantılık

$$\kappa_d(u,v) = [a-1+b-1](t-1)$$

olur ki bu durumda ikinci hesaplama ilk hesaplamadan küçüktür. Bunun dışında u tepesiyle grafta varsa v tepesi dışındaki ve v tepesiyle de u tepesi dışındaki tepe ikililerinin yerel derece bağlantılık değerleri $[\deg(m)+\deg(n)]\,\kappa(m,n)$ hesaplanırken u - v tepelerinin tepe dereceleri birer azaldığı için içten ayrık yolların sayısı azalmasa bile derece bağlantılık değeri azalır, dolayısıyla $\kappa_d(G-e) < \kappa_d(G)$ dir.

2. Durum: *G* den çıkarılan e ayrıtı grafın v tepesini izole tepe olarak bıraksın. Bu durum da yine $\kappa_d(G-e) < \kappa_d(G)$ olur, çünkü *G* nin n tane tepesi varken $G-e$ grafın da $n-1$ tane tepeden oluşan bir birleştirilmiş graf ve bir izole tepe olacaktır. Bu durum da $\kappa_d(G)$ hesaplanırken $\binom{n}{2}$ tane durum varken $\kappa_d(G-e)$ hesaplanırken $\binom{n-1}{2}$ tane durum olacağından $\kappa_d(G-e) < \kappa_d(G)$ olur.

3. Durum: Çıkarılan e ayrıtı *G* grafını $n_1 + n_2 = n$ olacak şekilde n_1 ve n_2 tepeli G_1 ve G_2 graflarına ayırsın. Dolayısıyla $\binom{n}{2} > \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ olduğundan $\kappa_d(G) > \kappa_d(G_1)+\kappa_d(G_2)$ dir.

Dolayısıyla durum 1, 2 ve 3 den dolayı $\kappa_d(G-e) < \kappa_d(G)$ dir.

Şimdi de graftan tepe çıkarıldığında grafın derece bağlantılık indeksinin nasıl değiştiğini inceleyelim.

Teorem 2.2: Herhangi bir *G* grafından bir v tepesinin çıkarılması durumunda grafın derece bağlantılık indeksi azalır [4].

$$\kappa_d(G-v) < \kappa_d(G)$$

İspat: Bir graftan bir tepe çıkarıldığında graftan en az bir ayrıt eksilmiş olur. Dolayısıyla Teorem 2.1 den dolayı $G-v$ grafının derece bağlantılık değeri *G* nin derece bağlantılık değerinden daha küçüktür.

Sonuç 2.1: *H* grafı *n* tepeli *G* grafının birleştirilmiş bir alt grafı olmak üzere;

$$\kappa_d(H) < \kappa_d(G)$$

dir [4].

İspat: *H* grafı *G* grafının alt grafı olduğundan *G* den tepe veya ayrıt çıkarılarak oluşturulmuş bir graftır. Dolayısıyla Teorem 2.1 den ve Teorem 2.2 den dolayı H nin derece bağlantılık indeksi *G* nin derece bağlantılık indeksinden küçüktür.

Sonuç 2.2: Herhangi bir G grafına bir v tepesinin toplanmasıyla oluşan grafın derece bağlantılık indeksi artar [4].

$$\kappa_d(G+v) > \kappa_d(G)$$

İspat: *G*, *n* tepeli herhangi bir graf olsun. G grafına v tepesinin eklenmesiyle oluşan $G+v$ grafı n+1 tepeli bir graf, v tepesi n dereceli bir tepe ve $G+v$ nin v dışındaki tepelerinin dereceleri de G dekilerin bir fazlası olur dolayısıyla derece bağlantılık indeksi $\kappa_d(G)$ hesaplanırken $\binom{n}{2}$ tane durum yerine $\binom{n+1}{2}$ tane durum hesaplanır. Hem durum sayısındaki artma hem tepe derecelerindeki artma hem de herhangi bir tepe çifti için eklenen tepe üzerinden farklı içten ayrık yolların hesaplanmasından dolayı artma olur. Bunlar da $\kappa_d(G+v)$ nin değerini $\kappa_d(G)$ den daha büyük yapar. Dolayısıyla $\kappa_d(G+v) > \kappa_d(G)$ dir.

Sonuç:

Bir iletişim ağının en önemli görevi fonksiyonunu yerine getirebileceği iletişimi korumasıdır. Bunu da tepeler arasındaki bağın çeşitliliği artıkça daha iyi koruyabilir. Ağın bazı tepe veya tepelerinde oluşabilecek hasarlar bu ağın işlevini tam olarak gerçekleştirmesini engeller. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken, veri akışının devamlılığını sağlamak için ağın bozulmalara karşı göstereceği direnci önemsemek gerekir. Direnci fazla olan bir model diğerlerine göre daha çok tercih edilir. Dolayısıyla bir sorunla karşılaşılması halinde ağda oluşabilecek hasar baştan en aza indirgemiş olur. Bunun için önceden teorik yaklaşımlar yapılabilir. Bu yaklaşımlar zedelenebilirlik adıyla graf teoride önemli bir yer tutmaktadır. Bu makalenin içeriğinde grafların zedelenebilirliğini ölçmek için *Derece Bağlantılılık İndeksi* adıyla yeni bir ölçüm tanımlanmıştır. Bu ölçüm graftaki ayrıtların veya tepelerin stratejik yerlerinden kaynaklanan özel durumları dikkate alır. Bu makalede derece bağlantılık indeksinin bazı graf işlemleri altındaki incelemeleri üzerindeki durulmuş, iki farklı graf modelinden zedelenebilirliği daha büyük olanın daha sağlam bir yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak bu çalışmada diğer zedelenebilirlik ölçümlerinden farklı yeni bir ölçüm önerilmiştir.

Referanslar

[1] Buckley, F., and Harary, F., Distance in Graphs, Addison Wesley Pub., 1990, California.
[2] Beineke, L. W., Oellerman, O. R. and Pippert, R. E., The Average Connectivity of a Graph, Discrete Math., 2002, 252, 31- 45.
[3] Chartrand., G., and Lesniak., L., Graphs and Digraphs, Chapman&Hall/CRC Press, 2005, USA.
[4] Gursoy M.U., Dundar P., Doktora Tezi: Graflarda Uzaklık İndeksleri Üzerine, Ege Üniversitesi, İzmir, 2014, Türkiye.
[5] Hartsfield, N., Ringel, G., Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction, Academic Press, 1990, USA.
[6] Barefoot C.A., Entringer R., Swart H., Vulnerability in Graphs – A Comparative Survey, J. Combin. Math. Combin. Comp., 1987, 1, 13-22.